

Séparation des variables

Pour résoudre Hamilton-Jacobi, lors que le système est isolé, on a utilisé la séparation des variables.

Est-ce qu'on peut voir la séparation des variables de façon plus large?

$$H(\{q_i\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_i}\}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ecrivons le de façon plus générale

$$F(\{q_i\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_i}\}, t, \frac{\partial S}{\partial t}) = 0$$

Si dans la structure de F on reconnaît qu'on peut grouper q_i et $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ dans une fonction "isolée", alors on peut séparer q_i des autres et écrire

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = S_i(q_i, \{c_i\}) + \tilde{S}(\{q_j\}_{j \neq i}, t, \{c_i\})$$

[bien entendu il s'applique aussi au temps]

Pratiquement

$$F\left(\phi_i(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}), \{q_j\}_{j \neq i}, t, \{\frac{\partial S}{\partial q_j}\}_{j \neq i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \{c_i\}\right) = 0$$

avec séparation $S = S_i + \tilde{S}$ elle devient

$$F\left(\phi_i(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i}), \{q_j\}_{j \neq i}, t, \{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_j}\}_{j \neq i}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \{c_i\}\right) = 0$$

et donc

$$\begin{cases} \phi_i(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i}) = c_i \\ F(c_i, \{q_j\}_{j=1}^N, t, \{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_j}\}_{j=1}^N, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \{c_i\}) = 0 \end{cases}$$

Lors qu'on arrive à le faire pour toutes les variables, une après l'autre, on dit que le système est

complètement separable et on écrit la solution

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = \sum_{k=1}^{3N} S_k(q_k, \{c_i\}) + S_t(t, \{c_i\})$$

Comme on le voit, pour isoler à chaque tour une variable on a besoin d'une constante. Donc on peut separer complètement un système si

- 1) il a la structure mathématique pour le faire
- 2) s'il y a $3N (+1)$ constantes qu'on peut utiliser

$\Rightarrow$ un système complètement separable est intégrable.

Vice-versa n'est pas nécessairement vrai

Exemple #2

Oscillateur harmonique en 2D (1 particule de masse m)

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - V(x, y)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2$$

L'eq. de Hamilton - Jacobi est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Si on re-ordonne :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

qui devient

$$\phi_x \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \phi_y \left(y, \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \phi_t \left(t, \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0$$

avec

$$\phi_x = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2$$

$$\phi_y = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2$$

$$\phi_t = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\Rightarrow S = S_x + S_y + S_t$$

$$\phi_x \left(x, \frac{\partial S_x}{\partial x} \right) + \phi_y \left(y, \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) = - \phi_t \left(t, \frac{\partial S_t}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_t \left(t, \frac{\partial S_t}{\partial t} \right) = -E \\ \phi_x + \phi_y = E \end{cases} \quad [\text{on le savait déjà}]$$

En suite

$$\phi_x + \phi_y = E$$

$$\Rightarrow \phi_x = E - \phi_y$$

et donc

$$\begin{cases} \phi_x = E_x \\ \phi_y = E - E_x \end{cases}$$

Question : le système est isolé. Donc E est conservée.
Comment sait-on que aussi E_x (et donc E_y) est conservée ?

On peut facilement le démontrer car

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2}_{H_x} \right] = \left\{ \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2, H \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 \right]$$

$$= \{H_x, H\} + 0 = \{H_x, H_x + H_y\} =$$

$$= \{H_x, H_x\} + \{H_x, H_y\} = 0$$

0 " parce que
par antisymétrie

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= 0 \\ \{p_x, p_y\} &= 0 \\ \{p_x, y\} &= 0 \\ \{x, p_y\} &= 0 \end{aligned}$$

Donc $H_x = E_x$ est conservée.

Si les deux fréquences ω_x et ω_y sont égales, alors
on dit que l'oscillateur est isotrope $[\omega_x = \omega_y = \omega]$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

on peut passer aux coordonnées polaires

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

On calcule les impulsions

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$$

Donc

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

L'eq. de Hamilton - Jacobi donc est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2m r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

On identifie :

$$\phi_\varphi \left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2$$

Donc

$$\phi_\varphi \left(\varphi, \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \text{const} = l_z^2$$

← p_φ^2

est-elle conservée ?
oui car le système est
isotrope !

et on a séparé la solution

$$S = S_\varphi + \tilde{S}(r, t)$$

En suite on a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$

On identifie

$$\begin{cases} \phi_r \left(r, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\ \phi_t \left(t, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \end{cases}$$

donc on peut aussi séparer r et t , et finalement on a

$$S = S_r + S_\varphi + S_t$$

Exemple 2 : coordonnées normales

On a vu que lors que on est proches d'un point d'équilibre mécanique stable on peut développer le potentiel et, si on s'arrête au deuxième ordre, on arrive, après des opérations d'algèbre linéaire, à

$$L = \sum_k L_k = \sum_k \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right]$$

On peut passer au formalisme de Hamilton :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k$$

$$\Rightarrow H = \sum_k H_k = \sum_k \left[\frac{1}{2} P_k^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right]$$

[on peut aisément vérifier que $\{Q_k, P_{k'}\} = \delta_{kk'}$, d'où on trouve que $H_k = E_k$ est conservée $\forall k$]

L'equation de Hamilton-Jacobi est alors

$$\sum_k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial Q_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_k Q_k^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

et il est facile de voir que

$$H_k(Q_k, \frac{\partial S}{\partial Q_k}) = \phi_k(Q_k, \frac{\partial S}{\partial Q_k})$$

et donc

$$\sum_k \phi_k(Q_k, \frac{\partial S_k}{\partial Q_k}) + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \phi_k(Q_k, \frac{\partial S_k}{\partial Q_k}) = E_k & \forall k \\ \phi_t(t, \frac{\partial S_t}{\partial t}) = \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E \end{cases}$$

↑
 $E = \sum_k E_k$

avec

$$S = \sum_k S_k + S_t$$

Solution de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$H(\{q_i\}, \{\frac{\partial W}{\partial q_i}\}) = E$$

Si on choisit $E = P_1$, on a, après la transformation,

$$K = P_1$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial P_1}{\partial P_i} = \delta_{i1} & \Rightarrow Q_i(t) = \delta_{i1} \cdot t + Q_i(0) \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 & \Rightarrow P_i(t) = P_i(0) \end{cases}$$

Mais en réalité, la seule chose qu'on sait est que E est une constante, et on peut la mettre en relation avec toutes les constantes du mouvement de façon presque arbitraire, c'est à dire

$$K(\{P_i\}) = E(\{P_i\})$$

Prenons comme exemple le cas de l'oscillateur harmonique en 2D

$$H = \underbrace{\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2}_{H_x} + \underbrace{\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2}_{H_y} = H_x + H_y = \underbrace{E_x + E_y}_E$$

Lorsque on écrit l'éq. caractéristique de Hamilton-Jacobi on écrit

$$H\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = E$$

Bien évidemment E est conservée, mais aussi E_x et E_y sont conservées

Donc on pourrait choisir

$$P_1 = E$$

$$P_2 = E_x \quad (\text{ou } E_y)$$

et alors

$$K = P_1$$

Mais on pourrait choisir

$$P_1 = E_x$$

$$P_2 = E_y$$

et alors

$$K = P_1 + P_2$$

On pourrait être même plus fou, et choisir

$$P_1 = E_x^2 + E_y^2$$

$$P_2 = 2 E_x E_y$$

} ou que E_x et E_y
sont constantes, alors aussi
 P_1 et P_2 sont constantes

et alors

$$K = \sqrt{P_1 + P_2}$$

[Il est clair que ce choix
n'est pas nécessairement la plus
intelligente, mais elle est,
mathématiquement, légitime]

En generale on dira

$$E = \beta(\{p_i\}) = K(\{Q_i\})$$

La consequence est que, après la transformation, les equations canoniques de Hamilton pour $\{Q_i\}$ et $\{p_i\}$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i} = \omega_i = \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_i(t) = \omega_i t + Q_i(0) \\ p_i(t) = p_i(0) \end{array} \right.$$

Toutes les $\{Q_i\}$ ont maintenant un comportement lineaire par rapport au temps (avant Q_1 était un peu privilegiee).

Alors, pourquoi est-il utile d'élargir le point de vue ?

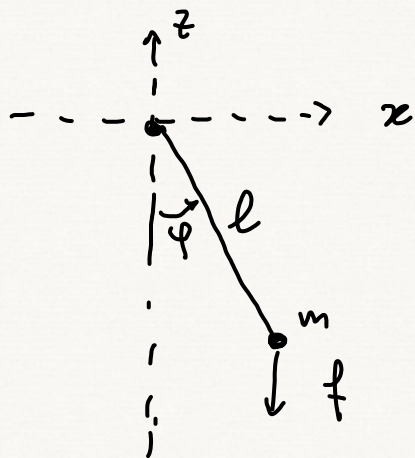
On va le voir avec les variables action-angle.

D'abord il faut introduire le concept de **portrait de phase**

Le portrait de phase

Le portrait de phase est une représentation des familles de trajectoires possibles dans l'espace de phase pour un système.

On va voir ça par biais d'un exemple.



Mass m attachée à une tige rigide de longueur l , soumise à la gravité

$$f = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial z}(mgz) \Rightarrow V = mgz$$

$$x = l \sin \varphi$$

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$z = -l \cos \varphi$$

$$\dot{z} = +l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

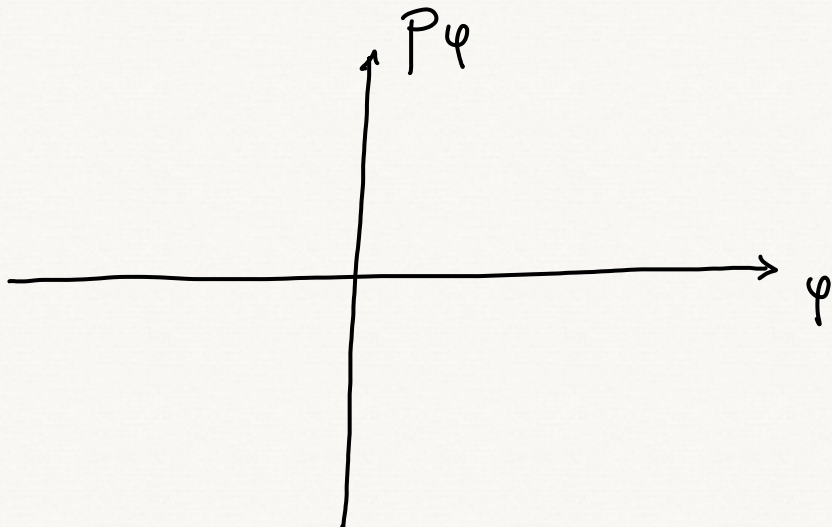
$$V = -mg l \cos \varphi$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mg l \cos \varphi$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{m l^2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{p_{\varphi}^2}{m l^2} - mg l \cos \varphi \Rightarrow \text{systeme isolé, donc } H = E \text{ conservée}$$

L'espace de phase du système est



Quelles sont les trajectoires possibles ?

On a deux cas possibles :

- 1) l'énergie du système est plus petite que l'énergie potentielle maximale, qui est atteinte par $\varphi = \pi$

$$V(\pi) = mgl$$

Dans ce cas, la masse va atteindre le $\bar{\varphi}$ maximale telle que $V(\bar{\varphi}) = E$, et en suite va revenir en arrière : mouvement périodique du type pendule.

- 2) l'énergie du système est $E > mgl$:
dans ce cas la masse peut bien arriver à $\varphi = \pi$ et même le dépasser.

- 3) $E = V(\pi)$!

Cas 1

$$\frac{P_{\varphi}^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi = E$$

$$\Rightarrow P_{\varphi}^2 = 2ml^2 (E + mgl \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow P_{\varphi} = \pm \sqrt{2ml^2 (E + mgl \cos \varphi)} = \pm \sqrt{2ml^2 E} \sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi}$$

$$\text{si } V(0) \leq \underset{E}{V(\bar{\varphi})} < V(\pi) \quad \left[\begin{array}{l} \text{par définition de} \\ \text{cas 1} \end{array} \right]$$

$$-mgl \leq -mgl \cos \bar{\varphi} < mgl$$

$$1 \geq \cos \bar{\varphi} > -1 \quad \text{et donc la racine existe.}$$

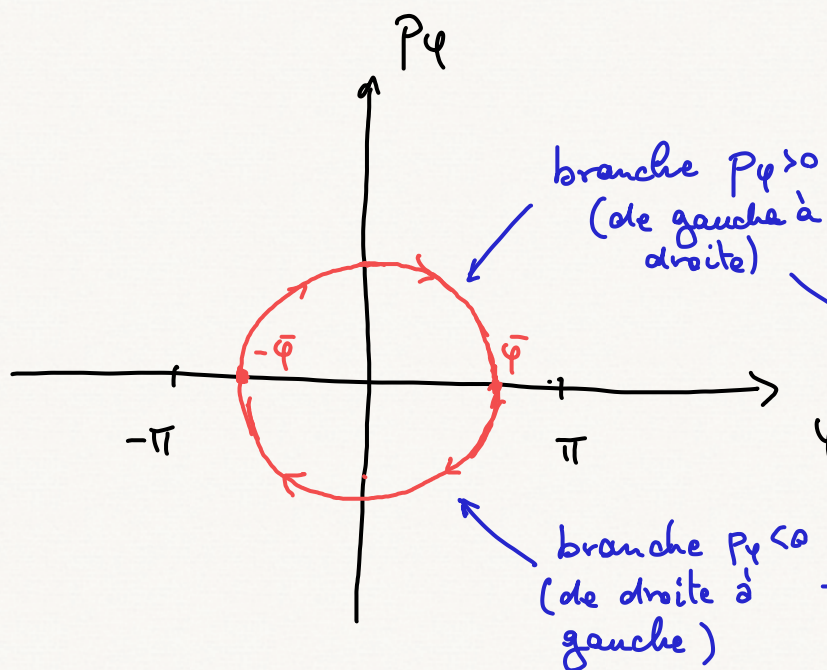
Cas 2

$$E > mgl$$

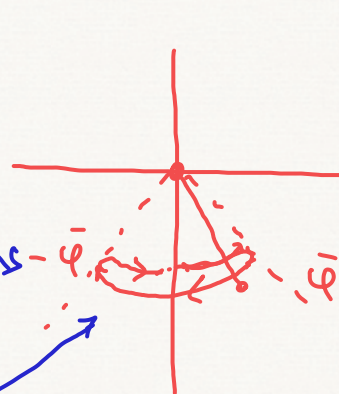
Dans ce cas aussi la racine existe, car même quand $\varphi = \pi$

$$1 + \frac{mgl \cos \pi}{E} = 1 - \frac{mgl}{E} > 0$$

Donc on peut dessiner une courbe qui représente tous les cas de type 1



$$P_\varphi = \pm \sqrt{2ml^2 E} \sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi}$$



attention à ne se faire pas tromper :

$$-mgl < E < mgl$$

si $E < 0$

$$\Rightarrow -mgl \cos \bar{\varphi} = E$$

$$\Rightarrow \cos \bar{\varphi} = \frac{-E}{mgl} > 0 \Rightarrow \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}$$

si $E > 0$

$$\Rightarrow -mgl \cos \bar{\varphi} = E$$

$$\Rightarrow \cos \bar{\varphi} = -\frac{E}{mgl} < 0 \Rightarrow \bar{\varphi} > \frac{\pi}{2}$$

Donc cette ellipse est parcourue selon la montee.

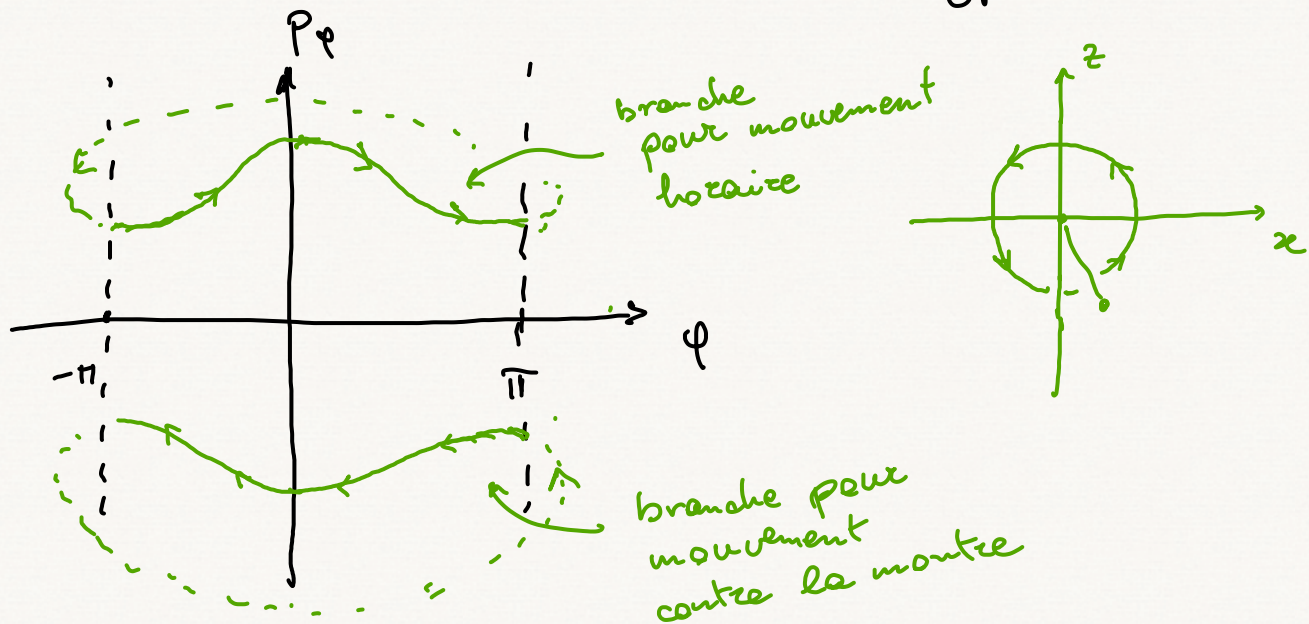
Note :

$$\frac{dP_\varphi}{d\varphi} = \pm \sqrt{2ml^2 E} \frac{\frac{mgl}{E} \cos \varphi}{2 \sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi}}$$

lorsque la masse atteint $\bar{\varphi}$, qui est

solution de $-mgl \cos \bar{\varphi} = E$, $\left. \frac{dP_\varphi}{d\varphi} \right|_{\bar{\varphi}} = \infty \Rightarrow$ donc tg verticale

On peut aussi dessiner les courbes de type 2



Les trajectoires de type 3 sont

$$P_\varphi = \pm \sqrt{2m\ell^2 E} \sqrt{1 + \frac{mg\ell}{E} \cos \varphi}$$

avec

$$E = mg\ell$$

$$K_g \cancel{K_g} \frac{m^2}{s^2} m^2 \rightarrow K_g \frac{m^2}{s}$$

donc

$$P_\varphi = \pm \sqrt{2m^2\ell^3 g} \sqrt{1 + \cos \varphi}$$

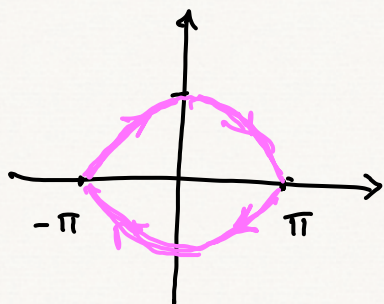
qui, en proximité de π , se comporte comme

$$P_\varphi \approx \pm \sqrt{2m^2\ell^3 g} \sqrt{1 + \left[-1 + \frac{1}{2}(\pi - x)^2\right]} =$$

$$\cos \varphi = -1 + \frac{1}{2}(\pi - x)^2$$

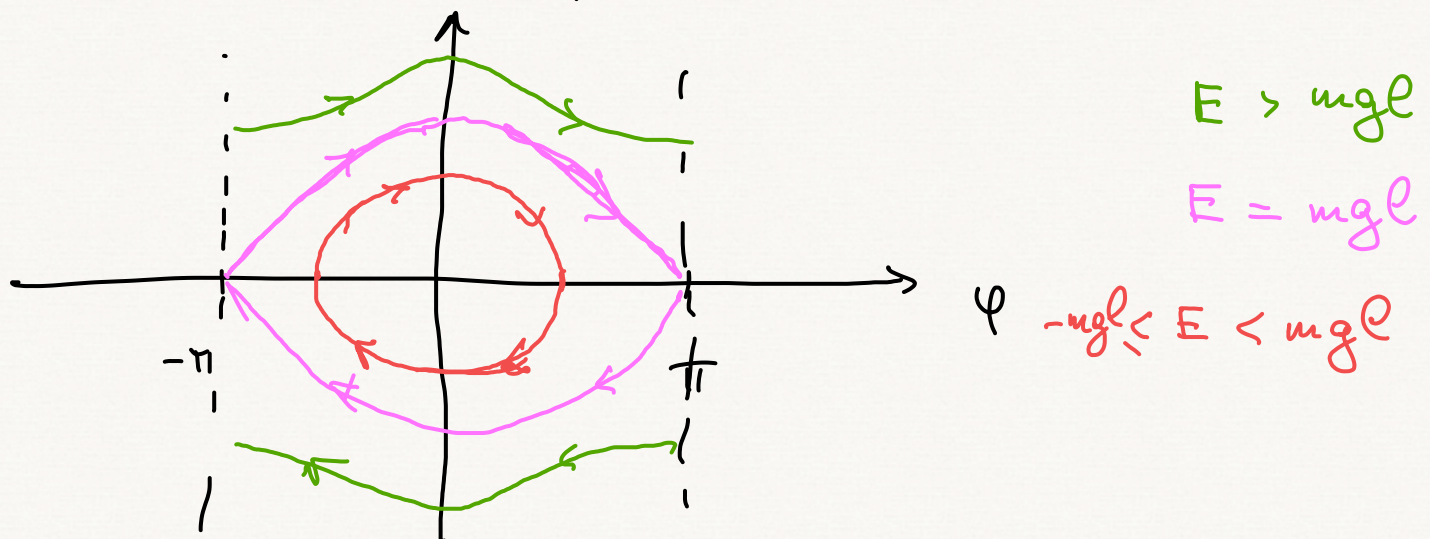
$$= \pm \sqrt{2m^2\ell^3 g} \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi - x| = \pm \sqrt{m^2\ell^3 g} (\pi - x)$$

et similairement pour $-\pi$



← dérivée en π et $-\pi$ finie et pas ∞ .

Donc on peut resumer le portrait de phase



Maintenant on peut adresser une autre question :

est-ce qu'on peut calculer la période du mouvement ?

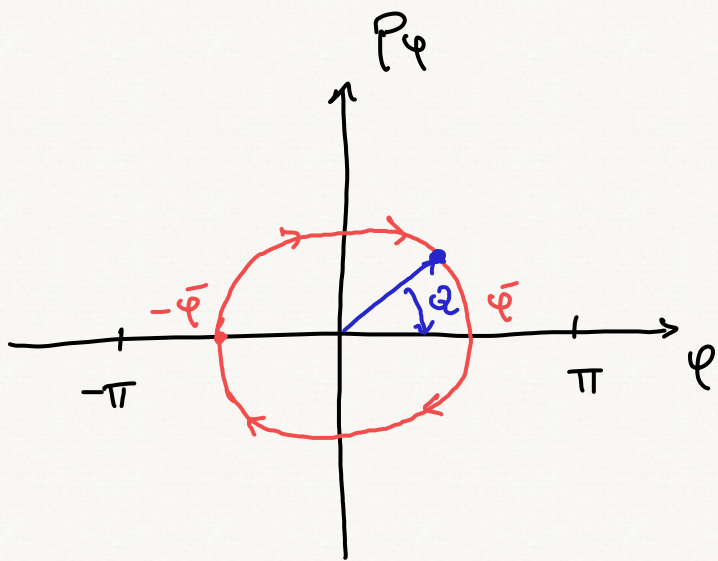
Pour des petites oscillations oui, mais en générale ?

Pour le faire on doit passer aux variables d'action-angle.

Variables action-angle

On prend le portrait de phase dans le cas

$$-mgl \leq E < mgl$$



On définit l'angle qui définit la position sur le cycle : Q

Après une période, Q change de 2π : $Q(T) - Q(0) = 2\pi$

On appelle $\varphi \rightarrow q$ et $P_\varphi \rightarrow p$ pour ramener le problème à sa forme générale

Bien évidemment il est $Q = Q(q, E)$ car

E définit le lieu, et q définit la position sur le lieu.

Donc .

$$\oint dQ = 2\pi$$

↑ l'intégrale sur une boucle complète

mais

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial q} dq \Rightarrow \oint \frac{\partial Q}{\partial q} dq = 2\pi$$

D'autre côté, Q est une variable qu'on peut chercher à l'aide d'une transformation canonique de type F_2 ($F_2(q, P)$). On sait que

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial P} \quad \text{on utilise } W \text{ car le système est isolé.}$$

$$\Rightarrow 2\pi = \oint \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial W}{\partial P} \right) dq = \oint \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right) dq =$$

$$= \frac{\partial}{\partial P} \oint \underbrace{\frac{\partial W}{\partial q}}_{= P} dq = 2\pi$$

on peut
l'extraire
de l'intégrale

Alors

$$\oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = 2\pi P$$

On peut l'écrire de façon plus explicite comme

$$\int_{-\bar{q}}^{\bar{q}} \frac{\partial W}{\partial q} dq + \int_{\bar{q}}^{-\bar{q}} - \frac{\partial W}{\partial q} dq = 2\pi P$$

on rappelle l'ambiguïté de signe en résolvant
l'éq. caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = E(\mathcal{P}) = \beta(\mathcal{P}) \quad \text{dans une seule dimension}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2m(\beta(\mathcal{P}) - V(q))}$$

Donc l'équation qu'on vient de trouver

$$\int_{-\bar{q}}^{\bar{q}} \sqrt{2m(\beta(\mathcal{P}) - V(q'))} dq' - \int_{\bar{q}}^{-\bar{q}} \sqrt{2m(\beta(\mathcal{P}) - V(q'))} dq' = 2\pi \mathcal{P}$$

devient une équation qui fixe $\beta(\mathcal{P})$

Donc le passage par transformation canonique à une variable Q qui se comporte de façon déterminée nécessite un choix spécial de $\beta(\mathcal{P})$.

Dans ce cas, on sait que $\dot{Q} = \frac{\partial \beta(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{\partial \beta(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} t + Q(0)$$

et alors

$$Q(T) - Q(0) = \frac{\partial \beta(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} T = 2\pi$$

et on trouve la période

$$T = 2\pi \left(\frac{\partial \beta(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} \right)^{-1}$$

